Capítulo 4

Resolución de los ejercicios

4.1. Soluciones e indicaciones a los problemas del Capítulo I

1. *a)*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-F_1+F_3}{\overset{F_2+F_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1+F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-F_3+F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-F_2+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente se divide por 3,por -1 y por 4 las filas primera, segunda y tercer respectivamente.

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

a) Se comprueba que

$$\overline{A} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema compatible determinado. La solución es $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$

b) La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta inmediato deducir que la solución es compatible indeterminada, el conjunto de soluciones es

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) = \lambda \left(1, 2, \frac{5}{2}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

c) Consideramos la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

y realizamos operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es inmediato ver que es un sistema CD cuya solución es $\{x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1\}$.

3.

a) Puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces vemos que el número de peldaños de las matrices escalonadas (de la de coeficientes y de la ampliada) es 2,y el número de incógnitas es 3. Por el Teorema de Rouché-Frobenius se trata de un sistema CI.

b) La matriz del sistema se transforma mediante operaciones elementales como sigue:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

El rango es dos, luego el Teorema afirma que se trata de uns sistema CI.

c)

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Así $r(A) = 2$, $r(\overline{A}) = 3$ y por ende el Teorema de Rouché-Frobenius establece que el sistema es incompatible.

4.

a) Para estudiar su independencia se plantea la siguiente igualdad entre vectores

$$\alpha\,(3,5,1) + \beta\,(2,1,3) = (0,0,0)$$

Tal igualdad se puede escribir como un sistema lineal homogéneo, a saber: de la igualdad anterior se tiene

$$(3\alpha + 2\beta, 5\alpha + \beta, \alpha + 3\beta) = (0,0,0)$$

que es lo mismo que

$$\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta &= 0 \\ 5\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + 3\beta &= 0 \end{aligned}$$

Estudiamos el sistema analizando la matriz asociada A

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -14 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

el rango de A es 2,que coincide con el número de incógnitas, por el Teorema de Rouché-Frobenius se trata de un sistema compatible determinado. Deducimos que la única solución es $\alpha = \beta = 0$ y por consiguiente que los vectores dados son l.i.

b) Ahora

$$\alpha\,(1,2,3)+\beta\,(1,3,2)+\gamma\,(0,-1,1) = (\alpha+\beta, 2\alpha+3\beta-\gamma, 3\alpha+2\beta+\gamma) = (0,0,0)$$

lo que se traduce en

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 0 \\ 2\alpha+3\beta-\gamma &= 0 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Su solución general es

$$\{\alpha = -s, \beta = s, \gamma = s : s \in \mathbb{R}\} = \{s(-1,1,1) : s \in \mathbb{R}\},$$

por tanto son l.d. y por ejemplo, tomando $s = 1$se tiene que

$$(-1)\,(1,2,3) + (1,3,2) + (0,-1,1) = (0,0,0)$$

ó

$$(1,2,3) = (1,3,2) + (0,-1,1)$$

Nótese que el n^o de vectores l.i. es $k = 1 = 3 - 2$,el rango es dos, eso significa que habrá uno que se puede escribir como combinación lineal de los otros dos, siendo estos últimos l.i. Se ha visto de hecho que $(1,2,3) = (1,3,2)+(0,-1,1)$.

c) Ahora se trata de cuatro vectores en $\mathbb{R}^4$,el sistema a analizar es el que se sigue de

$$\alpha\,(1,0,1,0) + \beta\,(2,1,3,1) + \gamma\,(0,1,1,1) + \delta\,(2,2,4,2) = (0,0,0,0)$$

i. e.

$$(\alpha+2\beta+2\delta,\beta+\gamma+2\delta,\alpha+3\beta+\gamma+4\delta,\beta+\gamma+2\delta)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned}\alpha+2\beta+2\delta &= 0\\ \beta+\gamma+2\delta &= 0\\ \alpha+3\beta+\gamma+4\delta &= 0\\ \beta+\gamma+2\delta &= 0\end{aligned}$$

La solución general es

$$\{\alpha=2s+2t,\beta=-s-2t,\gamma=s,\delta=t:s,t\in\mathbb{R}\}$$

Son l.d. y se pueden tomar, por ejemplo, $s=t=1$,con lo que poniendo $\alpha=4,\beta=-3,\gamma=1,\delta=1$ lograremos la combinación lineal deseada. En todo caso ahora $k=2=4-r(A)=4-2$,y por ello habrá un par de vectores entre los cuatro que se pueden escribir como combinación lineal de los otros dos restantes. Si tomamos $t=0$ y $s=1$se tiene

$$2\,(1,0,1,0)+(-1)\,(2,1,3,1)+1\,(0,1,1,1)=(0,0,0,0)$$

ó

$$(0,1,1,1)=-2\,(1,0,1,0)+(1)\,(2,1,3,1)$$

Y con $s=0$ y $t=1$se tiene

$$2\,(1,0,1,0)+(-2)\,(2,1,3,1)+1\,(2,2,4,2)=(0,0,0,0)$$

ó

$$(2,2,4,2)=-2\,(1,0,1,0)+(2)\,(2,1,3,1)$$

De manera que $(2,2,4,2)$ y $(0,1,1,1)$ son los que se pueden escribir como combinación lineal de $(1,0,1,0)$ y $(2,1,3,1)$, y éstos son l.i.

5. Como alternativa a la escritura de un vector de $\mathbb{R}^n$,que hemos convenido que se escriban en forma de filas, tenemos la posibilidad de escribirlos como columnas. Todas las propiedades se conservan y las operaciones se realizan de forma análoga. Analizamos el rango de conjuntos:

a) El sistema es

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$: \begin{pmatrix} \alpha + 7\beta - 6\gamma \\ \beta \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) 0

$$\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Para calcular el rango de una matriz (de los vectores columna que la componen) podemos proceder de dos formas, bien a través de un sistema homogéneo, tal y como se ha hecho en el ejercicio anterior, o bien mediante la determinación de la matriz escalonada.

a) Tomemos el primer método: para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

hemos de considerar la combinación lineal

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e

$$\begin{aligned} a + 3b + 4c &= 0 \\ 6a - 5b + 2c &= 0 \\ 7a - 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es la trivial. Por tanto son l.i., como hay tres se tiene rango 1.

b) Empleamos el método de la matriz escalonada para

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
B \;\sim\; & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
\sim\; & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
\sim\; & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
\sim\; & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
\sim\; & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\sim\; & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por tanto el rango es 4. Conviene notar que es el máximo rango que podía alcanzar la matriz.

7.

a) Operamos con la matriz ampliada:

$$
\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Se sigue que $\overline{p} = p = 3 = n$ y por ello es un SCD (Rouché-Frobenius). No cuesta trabajo usar la última matriz para deducir de manera recursiva que

$$x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$$

b) Es inmediato que

$$r\left(\overline{A}\right) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

y por tanto (Rouché-Frobenius) es un SCI. Reescribamos el sistema llevando a la derecha aquellas columnas en las que no están los unos de los peldaños. Si hacemos esto resulta que la solución general es el conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^4$ de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - a + b \\ x_2 &= 2 - a - b \\ x_3 &= a \\ x_4 &= b \end{aligned}$$

donde a y b son números reales cualesquiera. Esta solución general se escribe vectorialmente como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-a+b \\ 2-a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la expresión anterior da una idea de la estructura de las soluciones del sistema no homgéneo estudiado.

8. Para demostrar que todo conjunto con $n+1$ vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente basta con darse cuenta de que al hacer una combinación lineal de los vectores habrá n ecuaciones y $n+1$ incógnitas formando un sitema lineal homogéneo. Si se determina la matriz escalonada, ésta sólo podrá tener, a lo sumo, n peldaños de hay que el rango sea $< n+1 =$ *número de incógnitas*, y por Rouché-Frobenius se tratará de un SCI, esto es habrá dependencia lineal

9. Hagamos la s dos primera composiciones:

$$\begin{aligned} h \circ g \circ f(x) &= h \circ g(x^2+7) = h\left(3(x^2+7) - 5\right) \\ &= h\left(3x^2+16\right) = \sin\left(3x^2+16\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ h \circ g\,(x) &= g \circ h\,(3x-5) = g(\sin(3x-5)) \\ &= 3\,(\sin(3x-5)) - 5 = 3 \sin\,(3x-5) - 5 \end{aligned}$$

10. Escribir las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

 a) $f(1,0,0) = (1,\,2)$, $f(0,1,0) = (1,\,0)$, $f(0,0,1) = (0,\,-1)$ y por tanto la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

 b) $f(x,y,z) = (x-y,\, x+2y,\, 2x-3z)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

 c) $f(x,y,z) = 3x - y + z$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $f(x,y) = (x+y,\, 2x-y)$, hallar la imagen mediante f de las siguientes regiones:

 a) Los segmentos que delimitan al cuadrado

$$\{(x,y) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$$

son

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y) : x = 1,\ 0 \le y \le 1\} \\ S_2 &= \{(x,y) : x = 2,\ 0 \le y \le 1\} \\ S_3 &= \{(x,y) : y = 0,\ 1 \le x \le 2\} \\ S_4 &= \{(x,y) : y = 1,\ 1 \le x \le 2\} \end{aligned}$$

La imagen del primero consta de la imagen de todos los puntos que lo componene: así calculamos

$$f(1,y) = (1+y, 2-y) = (1,2) + y(1,-1)$$

que al tener limitado a y con $0 \le y \le 1$ es un segmento, el que une $(1,2)$ con $(2,1)$. Lo llmamaremos T_1 Acabamos de ver que $f(S_1) = T_1$. Del mismo modo procedemos con el resto de los segmentos:

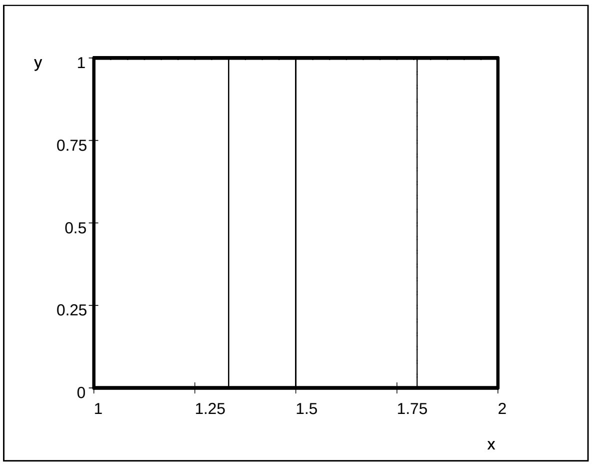
$$f\,(2,y) = (2+y, 4-y) = (2,4) + y(1,-1)$$

segmentos que une $(2,4)$ con $(3,-3)$;

$$f\,(x,0) = (x,2x) = x(1,2)$$

donde $x \in [1,2]$. Es pues el segmento que une $(0,0)$ con $(2,4)$.

$$f(x,1) = (x+1, 2x-1) = (1,-1) + x(1,2)$$



Cuadrado a transformar.

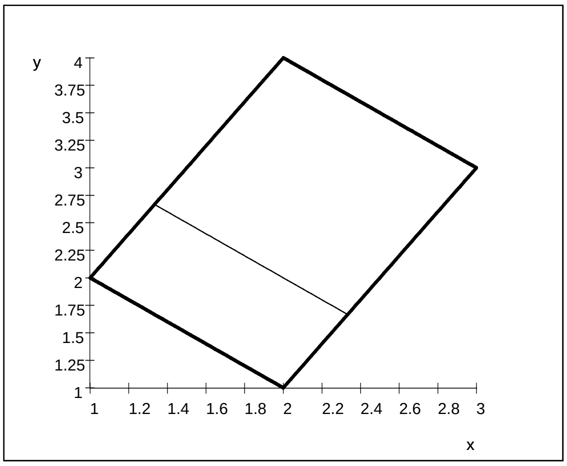


Imagen del cuadrado

Podemos ver en qué se transforma un segmento interior (dibujado con línea discontinua en la figura), un segmento del tipo

$$\begin{aligned} S &= \{x = x_0, y \in [0,1]\} : \\ f(x_0, y) &= (x_0 + y, 2x_0 - y) = (x_0, 2x_0) + y(1,-1) \end{aligned}$$

Es un segmento que lleva la dirección del vector $(1,-1)$, y que pasa por el punto $(x_0, 2x_0)$ y este punto está ubicado en el segmento superior T_3.

b) Un análisis parecideo sirve para determinar la imagen de

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

12. $\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$.

13. El plano $x = y$ se puede expresar resolviendo el sistema que define:

$$x - y = 0$$

La solución es

$$x = s, y = s, z = t$$

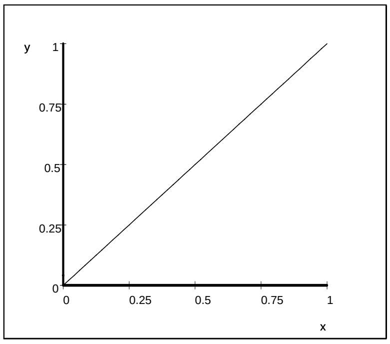
con s y t números cualesquiera. Reescribimos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ende el plano esstá generado por los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Así la imgen del tercer vectro dela basé canónica, $\overrightarrow{e}_3$, es

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Para analizar las imágenes de $f(1, 0, 0)$ y de $f(0, 1, 0)$ hemos de emplear un poco de geometría: si nos fijamos en el dibujo adjunto no es difícil verificar $f(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ y que $f(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$



La matriz pedida es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Para demostrar que las aplicaciones $f(x,y) = (x+y,\, x+2y)$ y $g(x,y) = (2x-y,\, -x+y)$ son inversas una de la otra basta con componer y ver que el resultado es la aplicación identidad. También es suficiente que las matrices asociadas son una la inversa de la otra. Optemos por este camino: la matriz de f es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y la de g es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la composición (cualquiera de las dos posibles) tiene como matriz a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Es inmediato si uno tiene en cuenta que $f^{-1}(y) = \frac{2+y}{3}$ (nótese que f no es lineal, y por ende f^{-1} tampoco)

16. Encontrar, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix} \; (a \neq 0), \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \; (a \neq 0)$$

17. Encontrar, si es posible, la inversa de las siguientes aplicaciones lineales

a) $f(x,y,z) = (x+y+z,\, 2x+z,\, x+y+2z)$ tiene como matriz asociada a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a f^{-1}, de existir la calculamos mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1+\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz de f^{-1} es

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y) = (x+cy,\, x-cy)$ tiene como matriz a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

y después de algunos calculos (similares a los de arriba) se tiene que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} \end{pmatrix}$$

Por tanto f^{-1} (o A^{-1}) existe sii $c \neq 0$. Nótese que

$$f^{-1}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ \frac{1}{2c}y_1 - \frac{1}{2c}y_2 \end{pmatrix}.$$

18. Encontrar A^{-1} y resolver el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ significa que como el sistema es

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b},$$

multiplicando (por la izquierda) esta igualdad por la matriz A^{-1}(en caso de ue exista) se tiene

$$A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$$

i.e.

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$$

a) Si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{37}{4} & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} \\ 11 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

y

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{37}{4} & -\frac{13}{4} & \frac{17}{4} \\ 11 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 40 \\ -48 \end{pmatrix}$$

b) Para este caso el proceso es el mismo, pero observamos que la resolución es más sencilla sin calcular la matriz inversa. La razón es que la matriz A es triangular y por tanto su resolución se puede realizar de modo recurrente. De hecho se tiene que $x_3 = 0$, $x_2 = \frac{-1}{9}$ y $x_1 = \frac{1/6+1/9}{2} = \frac{5}{36}$.

19. Para el apartado primero la solución es única: $\{z = 3, y = 1, x = 2, t = 0\}$ dado que

$$r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 4$$

La solución delsegundo es $\{x = 2, z = 1, y = 3\}$, se trata de nuevo de un sistema compatible determinado

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$